Blatt 05

November 14, 2018

1 Aufgabe 1

Party mit Daisy und Donald. Daisy bekommt 9 verschiedene Antworten, Partner begrüßen sich nicht gegenseitig. Insgesamt gibt es 10 Personen und somit 9 verschiedene Möglichkeiten, wie viele Leute begrüßt werden können.

Nach dem Schubfachprinzip müssen nun 2 Personen die gleiche Anzahl an Personen begrüßt haben. Da Daisy auf Nachfrage 9 verschiedene Antworten bekommt, muss Daisy die gleiche Anzahl an Begrüßungen haben wie jemand anderes.

Um die korrekte Anzahl an Begrüßungen zu erhalten, hat der Partner von der Person mit 8 Begrüßungen dann 0 Begrüßungen. Die weiteren Paare haben 7 und 1, 6 und 2, 5 und 3 sowie 4 und 4.

Da Daisy die gleiche Anzahl an Begrüßungen hat und es in dem Graphen

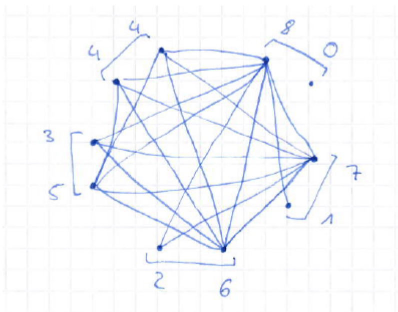

Figure 1: Graph mit Begrüßungen (Label ist Anzahl Begrüßungen)

(der komb. Argumentation) nur ein Paar gibt mit gleichen Begrüßungsanzahlen gibt, muss Daisy zu diesem Paar gehören. Demzufolge hat Donald ebenfalls die gleiche Anzahl und beide haben 4 Begrüßungen.

2 Aufgabe 2

Zu zeigen: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $|E| = |V| - 1$ ist ein Baum.
Nach Definition ist ein Baum ein kreisfreier zusammenhängender Graph. Es gilt für G zu zeigen:, dass

- G ist kreisfrei
- G ist zusammenhängend (nach Aufgabenstellung bereits erfüllt)

Beweis durch Widerspruch
Annahme: Es gibt einen Kreis (1,...,k) in G, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ $(V = \{1, ..., n\})$.
Die Knoten 1 bis k sind durch einen Pfad mit (k-1) Knoten verbunden. Eine weitere Kante besteht zwischen k und 1, da es sich um einen Kreis handelt. Da der Graph zusammenhängend ist, gibt es weitere (n-k) Knoten, die nicht im Kreis liegen und durch eine Kante mit dem Graphen verbunden sind.

$\Rightarrow |E| = (k-1) + 1 + (n-k) = n = |V|$
Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass gilt $|E| = |V| - 1$. $\Rightarrow$ G ist somit Kreisfrei.

Insgesamt folgt damit, dass $G = (V, E)$ mit $|E| = |V| - 1$ kreisfrei und zusammenhängend ist. Somit ist G ein Baum.
q.e.d